

Задание № 5. Решение задач с координатами пунктов геодезических сетей

Различают геодезические общеземные и референчные системы координат.

Начало общеземных систем координат находится в центре масс Земли, ось Z совмещена с осью вращения Земли, ось X лежит в плоскости гринвичского меридиана, ось Y дополняет систему до правой. Реализация геодезических систем координат, т.е. их связь с поверхностью Земли, выполняется на основании измерений. Поэтому из-за неизбежных ошибок возможны различные реализации общеземных систем.

Начало референчной системы координат находится в центре связанного с этой системой эллипсоида, ось Z совпадает с малой осью эллипсоида и параллельна оси вращения Земли, оси X и Y параллельны осям общеземной системы.

Референчные системы координат вводят под условием близости поверхности эллипсоида к уровенной поверхности в пределах территории того или иного государства. В связи с этим существует большое число отсечных эллипсоидов и связанных с ними региональных референчных систем. Параметры эллипсоидов, используемых в современных системах координат, приведены в таблице 12.

Взаимное расположение систем координат определяют положением начала координат относительно центра масс Земли и углами между осями координат. Координаты x_0, y_0, z_0 центра масс и углы $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ между осями координат называют внутренними элементами ориентирования.

В России в качестве общеземных используют системы ПЗ-90 (ПЗ - Параметры Земли), ее уточненные варианты ПЗ-90.02, ПЗ-90.11 и ГСК-2011.

Таблица 12. Параметры земных эллипсоидов

Эллипсоид	Большая полуось a , м	Квадрат эксцентриситета e^2	знаменатель сжатия $1/\alpha$
Бесселя	6 377 397	0,006674434883	299,15
Красовского	6 378 245	0,006693421623	298,3
ГРС-67	6 378 160	0,006694605329	298,2471674
ГРС80	6 378 137	0,006694380023	298,257222101
WGS-84	6 378 137	0,006694379990	298,257223563
ПЗ-90	6 378 136	0,006694366193	298,257839303
ПЗ-90.02	6 378 136	0,006694366193	298,257839303
ПЗ-90.11	6 378 136	0,0066943662	298,25784

Референчными системами в нашей стране являются системы координат 1932, 1945 и 1995 г.г. – СК-32, СК-42, СК-95.

Сведения об ориентировании систем геодезических координат приведены в таблице 13.

Таблица 13. Значения элементов трансформирования для основных систем координат, используемых на территории Российской Федерации:

№ п/п	Исходная система	Конечная система	ΔX , м	ΔY , м	ΔZ , м	ω_x 10 ³ угл.с	ω_y 10 ³ угл.с	ω_z 10 ³ угл.с	$m \times 10^6$
-------	------------------	------------------	----------------	----------------	----------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-----------------

	(А)	(Б)							
1	СК-42	ГСК-2011	+ 23,56 ± 2,00	-140,86 ± 2,00	- 79,77 ± 3,00	- 2 ± 10	- 346 ± 10	- 794 ± 10	- 0,227 ± 0,25
2	СК-95	ГСК-2011	+ 24,65 ± 0,43	- 129,14 ± 0,37	- 83,06 ± 0,54	- 67 ± 10	+ 4 ± 10	+ 129 ± 10	- 0,175 ± 0,2
3	ПЗ-90	ГСК-2011	- 1,44 ± 0,2	+ 0,17 ± 0,2	+ 0,23 ± 0,3	- 1,738 ± 1	+ 3,559 ± 1	- 134,263 ± 1	- 0,2274 ± 0,06
4	ПЗ-90.02	ГСК-2011	- 0,37 ± 0,1	+ 0,2 ± 0,1	+ 0,21 ± 0,2	- 1,738 ± 1	+ 3,559 ± 0,5	- 4,263 ± 0,5	- 0,0074 ± 0,05
5	ПЗ-90.11	ГСК-2011	+ 0,000 ± 0,01	- 0,014 ± 0,02	+ 0,008 ± 0,01	+ 0,562 ± 0,7	+ 0,019 ± 0,26	- 0,053 ± 0,23	+ 0,0006 ± 0,001
6	WGS-84 (G1150)	ГСК-2011	- 0,34 ± 0,1	+ 0,47 ± 0,1	+ 1,13 ± 0,2	- 1,738 ± 1	+ 3,559 ± 0,5	+ 65,737 ± 0,5	- 0,1074 ± 0,05
7	ITRF-2008	ГСК-2011	+ 0,002 ± 0,01	- 0,003 ± 0,02	- 0,003 ± 0,01	+ 0,053 ± 0,7	+ 0,093 ± 0,26	- 0,012 ± 0,23	+ 0,0008 ± 0,001

В таблице 13 x_o, y_o, z_o – линейное смещение координат начала одной системы координат относительно другой. В последнем столбце приведен масштабный множитель m – отличие масштаба от единицы. Трансформирование выполняется преобразованием

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix}_{CK2} = (1 + dm) \begin{bmatrix} 1 & w_z(rad) & -w_y(rad) \\ -w_z(rad) & 1 & w_x(rad) \\ w_y(rad) & -w_x(rad) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix}_{CK1} + \begin{bmatrix} \Delta X_o \\ \Delta Y_o \\ \Delta Z_o \end{bmatrix}; \quad (23)$$

Положение точек поверхности Земли определяется также и в системе геодезических криволинейных координат B, L, H . Геодезические прямоугольные и криволинейные координаты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L, \\ Z &= (N + H - Ne^2) \sin B \end{aligned} \quad (24)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L &= \frac{Y}{X}, \operatorname{tg} B_0 = \frac{Z}{(1 - e^2) D}, H = D \cos B_0 + Z \sin B_0 - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \\ \operatorname{tg} B &= \frac{z - He^2 \sin B_0}{(1 - e^2) D}, D = \sqrt{X^2 + Y^2} \end{aligned} \quad (26)$$

$$m_{xp}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \Delta x_0}\right)^2 * m^2_{\Delta x_0} + \left(\frac{\partial x}{\partial \Delta y_0}\right)^2 * m^2_{\Delta y_0} + \left(\frac{\partial x}{\partial \Delta z_0}\right)^2 * m^2_{\Delta z_0} + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega_x}\right)^2 * m^2_{\omega_x} + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega_y}\right)^2 * m^2_{\omega_y} \\ + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega_z}\right)^2 * m^2_{\omega_z} + \left(\frac{\partial x}{\partial dm}\right)^2 * m^2_{dm}$$

$$m_{yp}^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta y_0}\right)^2 * m^2_{\Delta y_0} + \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta x_0}\right)^2 * m^2_{\Delta x_0} + \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta z_0}\right)^2 * m^2_{\Delta z_0} + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega_x}\right)^2 * m^2_{\omega_x} + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega_y}\right)^2 * m^2_{\omega_y} \\ + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega_z}\right)^2 * m^2_{\omega_z} + \left(\frac{\partial y}{\partial dm}\right)^2 * m^2_{dm}$$

$$m_{zp}^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \Delta z_0}\right)^2 * m^2_{\Delta z_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial \Delta x_0}\right)^2 * m^2_{\Delta x_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial \Delta y_0}\right)^2 * m^2_{\Delta y_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega_x}\right)^2 * m^2_{\omega_x} + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega_y}\right)^2 * m^2_{\omega_y} \\ + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega_z}\right)^2 * m^2_{\omega_z} + \left(\frac{\partial z}{\partial dm}\right)^2 * m^2_{dm}$$

Задание

Определить среднюю квадратическую погрешность функции трансформирования пространственных координат:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix}_{СК2} = (1 + dm) \begin{bmatrix} 1 & w_z(rad) & -w_y(rad) \\ -w_z(rad) & 1 & w_x(rad) \\ w_y(rad) & -w_x(rad) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix}_{СК1} + \begin{bmatrix} \Delta X_o \\ \Delta Y_o \\ \Delta Z_o \end{bmatrix}; \quad (27)$$

1. Из таблицы 14, по номеру варианта i выбрать координаты пункта, из второй таблицы 15 – параметры эллипсоида.

где: i – номер вычисляемого варианта – последние две цифры шифра;
Геодезические координаты преобразовать в геоцентрические.

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L, \\ Y &= (N + H - Ne^2) \sin B \end{aligned} \quad (28)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (29)$$

2. Используя таблицу 16 (параметров трансформирования и СКП параметров трансформирования) определить параметры трансформирования СК(i)-СК($i+3$), где: i – номер вычисляемого варианта – последние две цифры шифра. Из таблицы 16 получить список параметров и СКП параметров трансформирования систем координат.

№ п/п		Δx	Δy	Δz	w_x	w_y	w_z	dm	Примечание
		СКП Δx	СКП Δy	СКП Δz	СКП w_x	СКП w_y	СКП w_z	СКП dm	
1	СК-(i) – СК-($i+1$)								
2	СК-($i+1$) – СК-($i+2$)								
3	СК-($i+2$) – СК-($i+3$)								

Составить конечную схему параметры и СКП параметров трансформирования.

№ п/п		Δx	Δy	Δz	w_x	w_y	w_z	dm	Примечание
		СКП Δx	СКП Δy	СКП Δz	СКП w_x	СКП w_y	СКП w_z	СКП dm	
1	СК-(i) – СК-($i+3$)								

3. Найти формулы (через частные производные) средних квадратических погрешностей функции трансформирования координат.

$$m_{xp}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \Delta x_0}\right)^2 * m^2_{\Delta x_0} + \left(\frac{\partial x}{\partial \Delta y_0}\right)^2 * m^2_{\Delta y_0} + \left(\frac{\partial x}{\partial \Delta z_0}\right)^2 * m^2_{\Delta z_0} + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega_x}\right)^2 * m^2_{\omega_x} + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega_y}\right)^2 * m^2_{\omega_y} + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega_z}\right)^2 * m^2_{\omega_z} + \left(\frac{\partial x}{\partial dm}\right)^2 * m^2_{dm}$$

$$m_{yp}^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta y_0}\right)^2 * m^2_{\Delta y_0} + \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta x_0}\right)^2 * m^2_{\Delta x_0} + \left(\frac{\partial y}{\partial \Delta z_0}\right)^2 * m^2_{\Delta z_0} + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega_x}\right)^2 * m^2_{\omega_x} + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega_y}\right)^2 * m^2_{\omega_y} + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega_z}\right)^2 * m^2_{\omega_z} + \left(\frac{\partial y}{\partial dm}\right)^2 * m^2_{dm}$$

$$m_{zp}^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \Delta z_0}\right)^2 * m^2_{\Delta z_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial \Delta x_0}\right)^2 * m^2_{\Delta x_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial \Delta y_0}\right)^2 * m^2_{\Delta y_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega_x}\right)^2 * m^2_{\omega_x} + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega_y}\right)^2 * m^2_{\omega_y} + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega_z}\right)^2 * m^2_{\omega_z} + \left(\frac{\partial z}{\partial dm}\right)^2 * m^2_{dm}$$

4. Вычислить погрешности преобразования координат пункта:

	m_x	m_y	m_z
СК-(i) – СК-(i+3)			

Пример

1. Геодезические координаты пункта

№ п/п	пункт						
	B			L			H
	о	'	"	о	'	"	м
i	51	31	16,80000	35	20	38,40000	20

Параметры эллипсоида

№ п/п	Эллипсоид №1	
	Semi-major axis (a) (большая полуось)	Semi-minor axis (b) (малая полуось)
1.	6378245,000	6356863,019

Геоцентрические координаты пункта в СК(i)

X	Y	Z
3243906,817	2300556,09	4969942,793

2. Параметры трансформирования

Параметры трансформирования из СК(j) в СК(j+1)								
СКj	СКj+1	dx	dy	dz	ω_x	ω_y	ω_z	dm*
		м	м	м	“	“	“	10 ⁶
СК-(i) – СК-(i+1)		20	-150	60	-0,5	3,5	-2,8	0,6
СК-(i+1) – СК-(i+2)		-10	-100	-100	-1,5	4,3	-1,8	0,5
СК-(i) – СК-(i+3)		60	30	90	0,3	1	1,5	2,9

СКП параметров трансформирования

СКП параметров трансформирования из СК(j) в СК(j+1)								
СКj	СКj+1	m _{dx}	m _{dy}	m _{dz}	m _{ox}	m _{oy}	m _{oz}	m _{dm} *
		М	М	М	“	“	“	10 ⁶
СК-(i) – СК-(i+1)		0,3	0,6	0,8	0,01	0,01	0,01	0,4
СК-(i+1) – СК-(i+2)		0,5	0,7	0,1	0,03	0,04	0,03	0,3
СК-(i) – СК-(i+3)		0,4	0,4	0,5	0,02	0,02	0,04	0,2

Итоговые параметры

Параметры трансформирования из СК(j) в СК(j+1)								
СКj	СКj+1	dx	dy	dz	ω _x	ω _y	ω _z	dm*
		М	М	М	“	“	“	10 ⁶
СК-(i) – СК-(i+3)		70	-220	50	-1,7	8,8	-3,1	4

СКП найденных параметров

СКП параметров трансформирования из СК(j) в СК(j+1)								
СКj	СКj+1	m _{dx}	m _{dy}	m _{dz}	m _{ox}	m _{oy}	m _{oz}	m _{dm} *
		М	М	М	“	“	“	10 ⁶
СК-(i) – СК-(i+3)								

3. Формула СКП функции трансформирования координат.
Частные производные и итоговую формулу находим самостоятельно.

4.

	m _x	m _y	m _z
СК-(i) – СК-(i+3)	2,2570	2,0002	3,2377